Kugelflächenfunktionen $Y_{lm}(\theta,\phi)$

- Definition durch zugeordnete Legendre-Polynome

$$Y_{lm}(\theta,\phi) \quad = \quad \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}\, P_l^m(\cos\theta)\, e^{im\phi}$$

$$l = 0,1,2,\ldots \qquad m = 0,\pm 1,\ldots,\pm l \qquad \theta\in[0,\pi] \quad \phi\in[0,2\pi]$$

- Zugeordnete Legendre-Polynome

$$P_l^m(s) \quad = \quad \frac{(-1)^m}{2^l l!}(1-s^2)^{m/2}\frac{d^{l+m}}{ds^{l+m}}(s^2-1)^l$$

- Definierende Differentialgleichung

$$\hat{L}^2\, Y_{lm}(\theta,\phi) \quad = \quad \hbar^2 l(l+1) Y_{lm}(\theta,\phi)$$

$$\hat{L}^2 \quad = \quad -\hbar^2\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right]$$

$$\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}+l(l+1)\right]Y_{lm}(\theta,\phi) \quad = \quad 0$$

- Explizite Ausdrücke

  $l = 0$

$$Y_{00}(\theta, \phi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$$

  $l = 1$

$$\begin{aligned} Y_{10}(\theta, \phi) &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\theta \\ Y_{1\pm1}(\theta, \phi) &= \mp\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\theta e^{\pm i\phi} \end{aligned}$$

- Orthogonalität

$$\begin{aligned} \langle lm|l'm'\rangle = \langle Y_{lm}|Y_{l'm'}\rangle &= \int d\Omega\, Y^*_{lm}(\Omega)\, Y_{l'm'}(\Omega) \\ &= \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-1}^{1} d(\cos\theta)\, Y^*_{lm}(\theta, \phi)\, Y_{l'm'}(\theta, \phi) = \delta_{ll'}\, \delta_{mm'} \end{aligned}$$

- Vollständigkeit

  Die Funktionen $Y_{lm}(\theta, \phi)$ bilden ein vollständiges Orthonormalsystem auf der Oberflche der Einheitskugel, d.h. jede integrable Funktion$f(\theta, \phi)$, $f : [0, \pi] \times [0, 2\pi] \to \mathbf{R}$ lässt sich schreiben als

$$f(\theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} a_{lm} Y_{lm}(\theta, \phi)$$

  mit

$$a_{lm} = \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-1}^{1} d(\cos\theta)\, Y_{lm}^*(\theta, \phi)\, f(\theta, \phi)$$

- Vollständigkeitsrelation

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} Y_{lm}^*(\theta', \phi')\, Y_{lm}(\theta, \phi) = \delta(\cos\theta - \cos\theta')\delta(\phi - \phi')$$

- Weitere Eigenschaften

$$\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \frac{1}{2l+1} \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} Y_{lm}^*(\theta', \phi') \, Y_{lm}(\theta, \phi)$$

mit $r_< = \min(r, r')$

Additionstheorem

$$P_l^0(\cos\gamma) = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^{l} Y_{lm}^*(\theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \phi)$$

Dabei ist γ der Winkel zwischen den durch θ, ϕ und θ', ϕ' gegebenen Richtungen